Visualisierung von Funktionalen auf Freiformflächen

Frank Langbein

Mai 1999

Abstrakt

Zur Darstellung und Integration von Funktionen auf Flächen wird ein Modell entwickelt, bei dem sowohl die Flächen als auch die Funktionen durch Splines beschrieben werden. Im besonderen werden hierzu biquadratische Splines verwendet. Zusätzlich werden auch getrimmte Flächen in diesem Zusammenhang betrachtet. Vor allem werden die wesentlichen Algorithmen aus dem für diese Arbeit entwickelten Programm LiLit vorgestellt.

Die Flächen werden durch biquadratische G–Splines dargestellt. Dazu wird ein aus Polygonen zusammengesetztes, semi–reguläres Kontrollnetz über die Polygone orientiert und aus den Kontrollpunkten werden die Kontrollnetze für biquadratische Bézierflächen berechnet. Die semi–regulären Kontrollnetze können über die Doo–Sabin Subdivision erzeugt werden, welche allgemein zur Verfeinerung von Kontrollnetzen beliebiger Topologie dient.

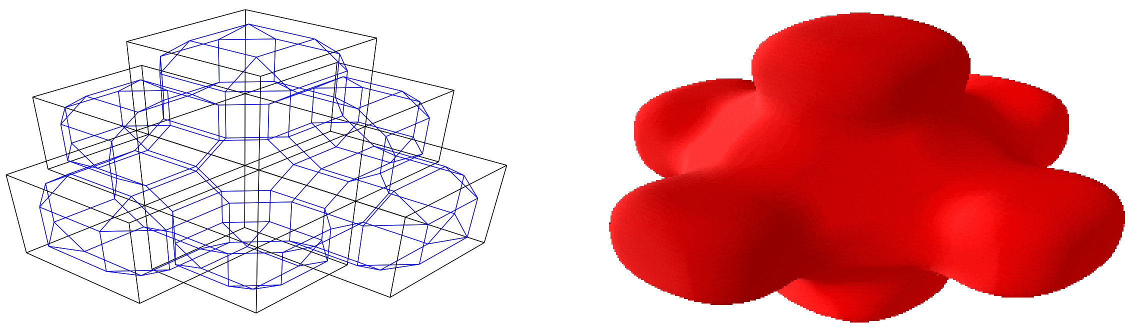

Abbildung 1: Doo–Sabin Subdivision zum Erzeugen einer G–Spline–Fläche

Für die Darstellung von Funktionen durch Splines werden zunächst zwei geometrisch glatt zusammengesetzte Bézierflächenstücke betrachtet. Zwei auf diesen Flächenstücken definierten Funktionen lassen sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion zusammensetzen, wenn sie Bedingungen erfüllen, die formal mit denen der geometrischen Glattheit übereinstimmen. Damit können stetig differenzierbare Funktionen auf Splineflächen beschrieben werden, indem zu jedem Flächenkontrollpunkt ein Funktionskontrollpunkt angegeben wird. In den Algorithmen können die Funktionskontrollpunkte mit den gleichen Formeln wie für die Flächenkontrollpunkte behandelt werden. Die Darstellung der Funktion kann durch Stacheln auf der Fläche, durch ein Gitter über der Fläche, durch Farbwerte auf der Fläche oder durch Farbwerte auf einer Fläche über der Fläche erfolgen.

Oberflächenintegrale von Skalar- und Vektorfeldern über als Splines gegebenen Funktionen können aus der Summe der Integrale über die einzelnen Bézierflächen

berechnet werden. Hierzu wird der bivariate Rombergalgorithmus verwendet. Speziell kann so der Flächeninhalt und das Volumen geschlossener Flächen berechnet werden.

Eine alternative Darstellungsart für die Funktionen auf den Flächen sind Isolinien. Hierzu werden auf der Fläche Linien gezeichnet, auf denen die Funktion den gleichen Funktionswert hat. Der Algorithmus hierfür unterteilt den Parameterbereich adaptiv über quadratische Gitter, so daß durch jede Seite der Quadrate nur jeweils eine Isolinie geht, die dann mittels linearer Interpolation gezeichnet werden kann. Weiter wird die Anzahl der gezeichneten Linien pro Quadrat durch eine maximale Anzahl von Linien in den kleinsten Quadraten beschränkt. Eine Anwendung dieser Isolinien ist das Zeichnen von Reflektionslinien auf der Fläche. Hierbei werden parallele Lichtquellen mit festem Abstand auf einer Ebene mittels eines Beobachtungspunktes an der Fläche reflektiert. Die Punkte auf der Fläche, deren Reflektionsstrahl die gleiche Lichtquelle in der Ebene trifft, gehören zur gleichen Isolinie.

Zum Trimmen der Flächen und damit auch der auf diesen Flächen definierten Funktionen werden sowohl Volumina im Raum der Fläche als auch Kurven im Parameterbereich verwendet. Die Volumina werden implizit durch quadratische Formen gegeben, die immer den in ihr enthaltenen Teil der Fläche ausschneiden. Die Kurven im Parameterbereich sind jeweils an einen Kontrollpunkt der biquadratischen Fläche gebunden und können sowohl als Polygonzug als auch über Kontrollpunkte für geometrisch glatte, quadratische Splinekurven angegeben werden. Die Splinekurven werden in einen Polygonzug umgewandelt, wobei davon ausgegangen wird, daß der Polygonzug immer im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Falls die Splinekurve nicht geschlossen ist, wird sie geeignet durch den Rand des Parameterbereichs erweitert. Bei überlappenden Trimmbereichen im Parameterbereich, wird ein Punkt nur dann ausgeschnitten, wenn er in einer ungeraden Anzahl von Trimmbereichen liegt. Der Trimming Algorithmus unterteilt den Parameterbereich eines Bézierflächenstücks adaptiv über quadratische Gitter. Je nachdem wieviele Ecken eines Quadrates ausgeschnitten werden, wird wie im nicht–getrimmten Fall verfahren, nur ein Dreieck behandelt oder das ganze Quadrat ausgeschnitten.

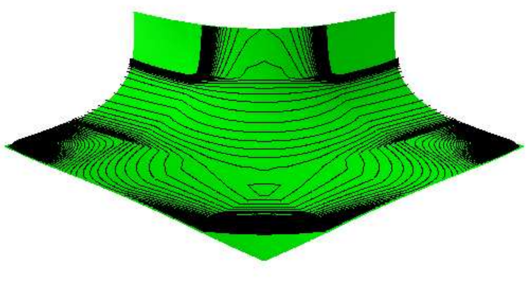

Abbildung 2: Reflektionslinien in der Nähe einer Irregularität der Ordnung 5

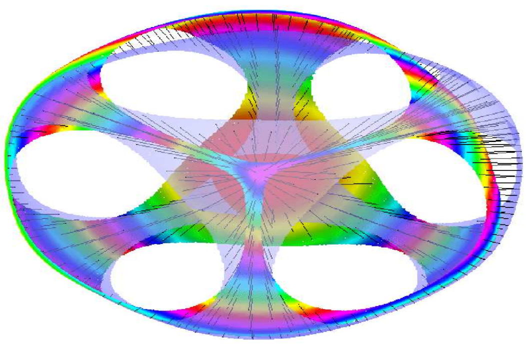

Abbildung 3: Funktion auf einer getrimmten Fläche